Somme des termes d'une suite arithmétique

On peut trouver la somme des termes d'une progression, en connaissant le premier, le dernier terme et le nombre de termes.

Notons $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n$ la somme des n termes d'une progression, d'après la formule [i] la somme s' écrit

$S_n = a + a + 2r + ... + a + r \times (n - 2) + a + r \times (n - 1)$.

En additionnant 2 fois la somme une fois dans l' ordre croissant et une fois dans l' ordre décroissant

$[a] \qquad + [a + r] \qquad + ... + [a + r \times (n - 1)]$

$[a + r \times (n - 1)] + [a + r \times (n - 2)] \qquad + ... + [a]$

$[2a + r \times (n - 1)] + [2a + r \times (n - 2) + r] + ... + [2a + r \times (n - 1)]$

On obtient

$2S_n = [2a + r \times (n - 1)] + [2a + r \times (n - 2) + r] + ... + [2a + r \times (n - 1)]$

$2S_n = [2a + r \times (n - 1)] + [2a + r \times (n - 1)] + ... + [2a + r \times (n - 1)]$

$2S_n = n \times [2a + r \times (n - 1)]$

$2S_n = n \times [a + a + r \times (n - 1)]$

$2S_n = n \times [a + a + r \times (n - 1)]$

comme $u_1 = a$ et $u_n = a + r \times (n - 1)$

on obtient

$2S_n = n \times [u_1 + u_n]$

Nous trouvons ainsi la règle suivante :

La somme des termes d'une progression arithmétique est égale à la demi somme des extrêmes multipliée par le nombre des termes.

Cette règle est exprimée par la formule :

$\mathbf{S_n = n \times [u_1 + u_n] / 2}$ ou encore $s_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Somme des termes d'une suite géométrique

Désignons par S_n la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme a et de raison q, non nul, non égal à 1 .

La somme S_n s' écrit

$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1}$.

Si on multiplie tous les termes par la raison q, nous aurons

$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^n$.

Si l'on retranche la somme S_n de la somme qS_n la soustraction fera disparaître les termes $aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^{n-1}$ et il restera :

$qS_n - S_n = aq^n - a$

$S_n (q - 1) = a (q^n - 1)$,

d'où l'on tire (q étant différent de 1)

$S_n = a (q^n - 1) / (q - 1)$.

On voit que pour avoir la somme, il faut multiplier le premier terme par la puissance n^e raison diminué de 1 et diviser par la raison diminué de 1.

REMARQUE - Dans le cas d'une raison inférieur à 1 le facteur $q^n - 1$ et dénominateur $q - 1$ sont négatifs. On change alors leurs signes, ce qui n'altère pas la valeur de la somme S. On a ainsi la formule

$S_n = a (1 - q^n) / (1 - q)$

ou encore : $s_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

C'est dans les questions relatives aux intérêts composés, aux remboursements par annuités, à la constitution d'un capital par les placements annuels que se présentent les applications les plus importantes des suites géométriques.