Fonction logarithme décimal

➢ *Approche :*

Soit la fonction exponentielle $f: x \to 10^x$ ($f(x) = 10^x$),
pour tout x, log (10^x) = x, la fonction logarithme décimal est la fonction inverse de la fonction exponentielle de base 10.
Sur la calculatrice la fonction logarithme décimal s'obtient avec la touche « log »
Compléter le tableau :

x	*-1*	*0*	*0,01*	*0,1*	*0,5*	*1*	*3*	*5*	*10*	*0,01*
log(x)	*Erreur*	*Erreur*	*-2*	*-1*	*-0,3*	*0*	*0,5*	*0,7*	*1*	*-2*

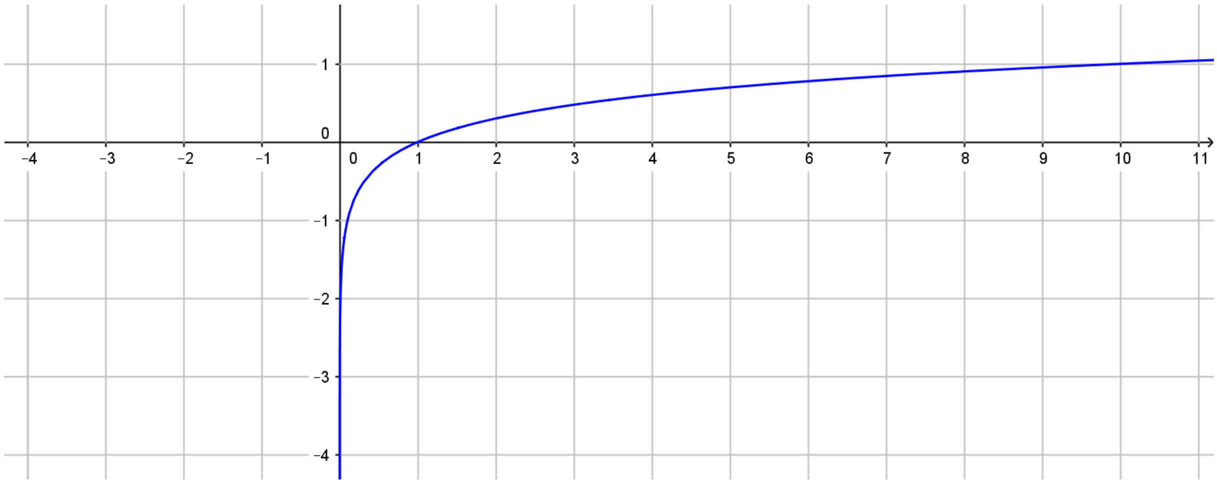
La fonction logarithme décimal est définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[

➢ *Représentation graphique :*

A partir du tableau précédent, placer sur le repère suivant les points de coordonnées *(x, log(x))*.

Déterminer graphiquement la valeur de *x* qui vérifient *log(x)=1* : *x = 10*

La fonction logarithme décimal est **croissante** sur l'intervalle]0 ; + ∞[



➢ *Tableau de variation :*

x	*0*		*1*		*+∞*
log(x)	−∞	↗	*0*	↗	+∞

Fonction logarithme décimal

Propriétés opératoires

Compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats au centième :

a	b	$\log(a) + \log(b)$	$\log(a \times b)$	$\log(a)-\log(b)$	$\log(a/b)$	$b \times \log(a)$	$\log(a^b)$
2	3	≈ 0,778	≈ 0,778	≈ -0,176	≈ -0,176	≈ 0,903	≈ 0,903
2	5	1	1	≈ 0,398	≈ 0,398	≈ 1,505	≈ 1,505
0,5	14	≈ 0,845	≈ 0,845	≈ -1,447	≈ -1,447	≈ -4,214	≈ -4,214
7,9	4,2	≈ 1,521	≈ 1,521	≈ 0,274	≈ 0,274	≈ 3,770	≈ 3,770
6,3	8	≈ 1,702	≈ 1,702	≈ -0,104	≈ -0,104	≈ 6,395	≈ 6,395

Comparer les résultats obtenus :

$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$

$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$

$\log(a^b) = b \times \log(a)$

$\log(10)=1$ et $\log(1)=0$

Application à la résolution d'équations

- Résoudre l'équation

$$2^x = 1024$$

$$\log(2^x) = \log(1024)$$

$$x \log(2) = \log(1024)$$

$$x = \frac{\log(1024)}{\log(2)} = 10$$

- La population d'une ville s'accroît chaque année de 1%. Dans combien d'année la population sera-t-elle passée de 45 000 à 49 216 habitants ?

  Cela équivaut à résoudre l'équation $49216 = 45000 \times 1{,}01^n$,

soit $\log 49\,216 = \log(45000 \times 1{,}01^n)$

$$\log 49\,216 = \log(45000) + \log(1{,}01^n)$$

$$\log 49\,216 = \log(45000) + n \log(1{,}01)$$

d'où $n = \dfrac{\log 49216 - \log 45000}{\log 1{,}01}$ = 9 ans

__Fonction logarithme décimal__

- Imaginons un heureux capitaliste dont la fortune est multipliée par 10 chaque année :

Nombre d'années *n*	0	1	2	3	...
Fortune *F* (€)	1	10	100	1 000	...

Quelle sera sa fortune au bout de 7 ans ?
Au bout de combien d'années deviendra-t-il milliardaire ?

Nombre d'années n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fortune F (€)	1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000

On peut résoudre l'équation $10^9 = 1 \times 10^n$

soit $\log 10^9 = \log(10^n)$

$9 = n$

Il sera milliardaire au bout de 9 ans

- La population d'un pays augmente de 2% par an :

Nombre d'années *n*	0	1	2	3	...
Population *P* (millions d'hab.)	65				...

Quelle sera sa population au bout de 7 ans ?
Au bout de combien d'années dépassera-t-on 100 millions d'habitants ?

Au bout de 7 ans : $65 \times 1{,}02^7$ ≈ 75 millions d'habitants

On peut résoudre l'équation $100 = 65 \times 1{,}02^n$,

soit $\log 10^2 = \log(65 \times 1{,}02^n)$

$2 = \log 65 + \log 1{,}02^n$

$$n = \frac{2 - \log 65}{\log 1{,}02} \approx 22 \text{ ans}$$