Fonction logarithme népérien

- *Approche :*

Sur la calculatrice la fonction logarithme népérien s'obtient avec la touche « ln »

Compléter le tableau :

x	-1000	-5	0	0,001	0,5	1	2	100000
$ln(x)$								

La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[

- *Etude de la fonction :*

Compléter le tableau :

x	0,1	0,5	1	2	4	8	10	100
$ln(x)$								
$\frac{\ln(x+0{,}0001)-\ln(x)}{0{,}0001}$								

Le rapport $\frac{\ln(x+0{,}0001)-\ln(x)}{0{,}0001}$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction aux points d'abscisses respectives 0,1; 0,5 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 10 ; ... On peut assimiler ce rapport à la valeur de la dérivée en chacun des points d'abscisses x.

La dérivée de la fonction logarithme népérien est $\frac{1}{x}$

- *Représentation graphique :*

A partir du tableau précédent, placer sur le repère suivant les points de coordonnées $(x, ln(x))$.

Construire les tangentes en chacun de ces points et tracer la courbe représentative de la fonction.

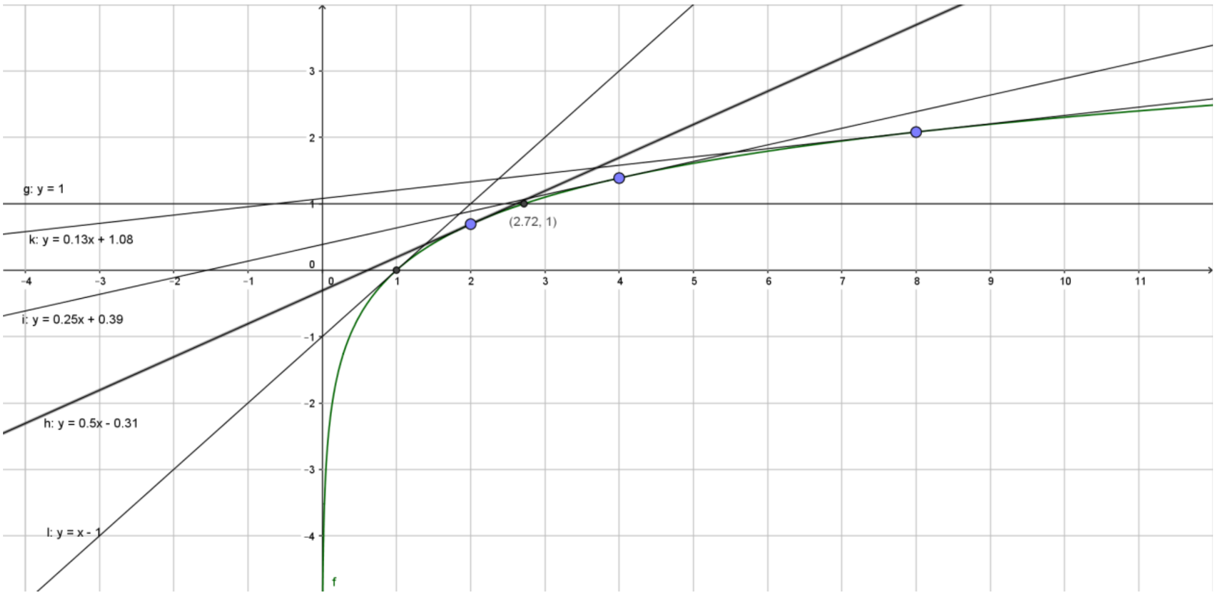
Déterminer graphiquement la valeur de x qui vérifient $ln(x)=1$: ....

La fonction logarithme népérien est **croissante** sur l'intervalle]0 ; + ∞[

- *Tableau de variation :*

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Fonction logarithme népérien



➢ *Propriétés opératoires*

Compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats au centième :

a	b	$ln(a) + ln(b)$	$ln(a \times b)$	$ln(a)$-$ln(b)$	$ln(a/b)$	$b \times ln(a)$	$ln(a^b)$
2	3						
2	5						
0,5	14						
7,9	4,2						
6,3	8						

Comparer les résultats obtenus :

....

....

....

....

....

....

- *Application à la résolution d'équations*

- Résoudre l'équation $2^x = 1024$

$$\ln(2^x) = \ln(1024)$$
$$x \ln(2) = \ln(1024)$$
$$x = \frac{\ln(1024)}{\ln(2)} = 10$$

- La population d'une ville s'accroît chaque année de 1%. Dans combien d'année la population sera-t-elle passée de 45 000 à 49 216 habitants ?

  Cela équivaut à résoudre l'équation $49216 = 45000 \times 1{,}01^n$,

soit $\ln 49\,216 = \ln(45000 \times 1{,}01^n)$

$$\ln 49\,216 = \ln(45000) + \ln(1{,}01^n)$$
$$\ln 49\,216 = \ln(45000) + n \ln(1{,}01)$$

d'où $n = \dfrac{\ln 49\,216 - \ln 45\,000}{\ln 1{,}01}$ = 9 ans

- Imaginons un heureux capitaliste dont la fortune est multipliée par 10 chaque année :

Nombre d'années n	0	1	2	3	...
Fortune F (€)	1	10	100	1 000	...

Quelle sera sa fortune au bout de 7 ans ?
Au bout de combien d'années deviendra-t-il milliardaire ?

- La population d'un pays augmente de 2% par an :

Nombre d'années n	0	1	2	3	...
Population P (millions d'hab.)	65				...

Quelle sera sa population au bout de 7 ans ?
Au bout de combien d'années dépassera-t-on 100 millions d'habitants ?