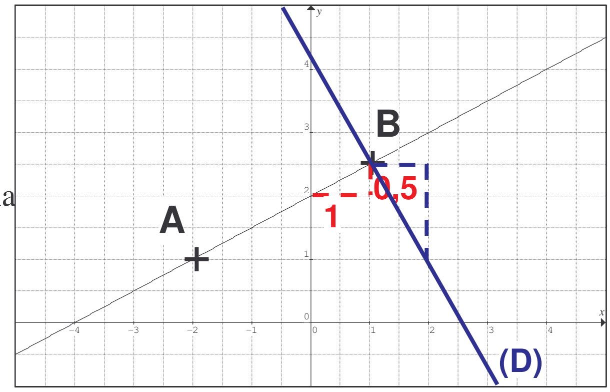
Dérivée d'une fonction

1) Rappel

Dans un repère orthogonal, on considère les points A et B.



➪ Déterminer, sans calcul, par lecture graphique, le cœfficient directeur de la droite (AB).

a = 0,5

➪ Déterminer par le calcul, le cœfficient directeur de la droite (AB).

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2{,}5 - 1}{1 - (-2)} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

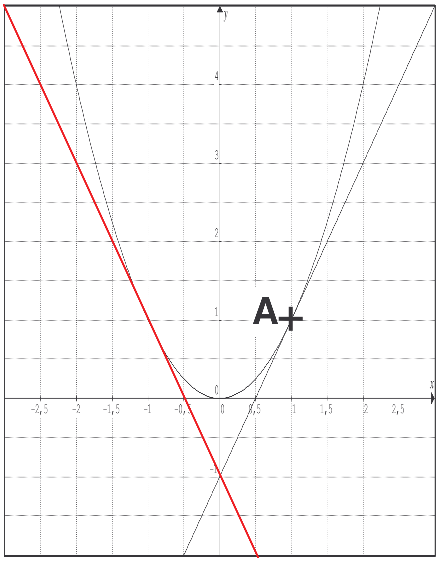
➪ Déterminer une équation de la droite (AB).

$y = ax + b = 0{,}5x + 2$

➪ Construire la droite (D) passant par B dont le coefficient directeur est –1,5.

2) Notion de derivee

Activité



➪ La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-contre représente la fonction f définie sur ℝ par f(x) = x^2. La droite T représente la fonction g définie sur ℝ par g(x) = 2x–1.

➪ Graphiquement, on voit que la droite T « touche » la courbe $\mathscr{C}$ au point A(1 ; 1)

➪ Algébriquement, montrer que la recherche des points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et T revient à résoudre l'équation : $x^2 - 2x + 1 = 0$.

$\mathscr{C}$ coupe T lorsque $x^2 = 2x - 1$

➪ Résoudre cette équation.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$; une racine double

$x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$ ou $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$; $x - 1 = 0$ pour $x = 1$

➪ On constate qu'il n'y a qu'un seul point d'intersection entre $\mathscr{C}$ et T. On dit que la droite T est ***tangente*** à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse **1**

➪ Quel est le coefficient directeur de la droite T ? a = 2

Par définition, ce nombre est appelé ***nombre dérivé*** de la fonction f pour la valeur **1**

➪ Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f pour la valeur –1.

En –1, la tangente a pour coefficient directeur –2

Soit la fonction f' définie sur ℝ par $f'(x) = 2x$.

➪ Vérifier que f' permet d'obtenir le nombre dérivé de f pour les valeurs 1 et –1.

$f'(1) = 2 \times 1 = 2$; $f'(-1) = 2 \times -1 = -2$

On admettra qu'il en est ainsi pour toutes les valeurs de ℝ : On dit que f' est la ***fonction dérivée*** de f.

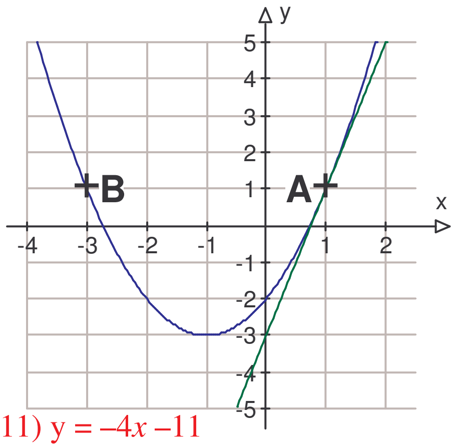
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On suppose que sa courbe représentative admette, au point A d'abscisse "a", une tangente.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse "a" est le nombre dérivé de la fonction f en "a"

La fonction qui, a tout x de I, fait correspondre le nombre dérivé de f en x, est appelée dérivée de f . Elle est notée $f\,'$ ou $f\,'(x)$



Exercice

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 2x - 2$, sachant que $f\,'(1) = 4$, déterminer :

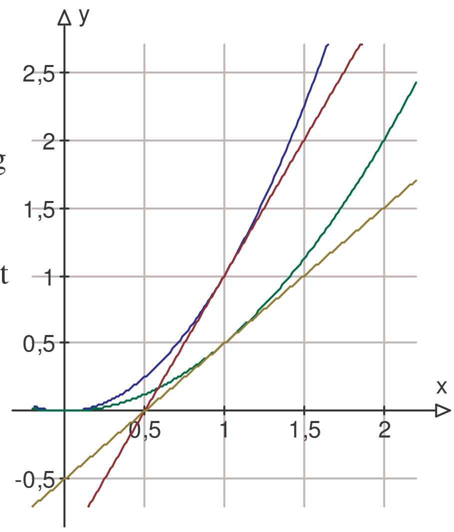
coordonnées du point A : (1 ; 1)

coefficient directeur de la tangente en A : a = 4

équation de la tangente en A : $y = 4x - 3$

équation de la tangente en B : $y = -4x + b$ (en B : $1 = -4 \times -3 + b \Rightarrow b = -11$) $y = -4x - 11$

3) CALCUL DES DERIVEES



Activité

➪ Ci-contre figurent les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur ℝ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 0{,}5x^2$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisse 1.

➪ Déterminer graphiquement les nombres dérivés des fonctions f et g aux points d'abscisse 1 :

$f\,'(1) = 1$ $g\,'(1) = 0{,}5$

➪ On a $g(x) = 0{,}5 \times f(x)$. Vérifier que $g'(1) = 0{,}5 \times f\,'(1)$.

$0{,}5 \times 1 = 0{,}5$

On voit que la dérivée de $0{,}5f$ est $0{,}5f\,'$. Plus généralement, si u est une fonction admettant pour dérivée u' et si a est un nombre constant alors la dérivée de $a \times u$ est ***au'***

Dérivées des fonctions usuelles

Soient f une fonction, a et b deux constantes.

Fonctions f	**Dérivées $f\,'$**
$f(x) = a$	$f\,'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f\,'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f\,'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f\,'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f\,'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f\,'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Soit la fonction f:

$$x \mapsto a\,x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La fonction dérivée de f sera f' :

$$x \mapsto n\,a\,x^{n-1}$$

Soient u et v, deux fonctions admettant pour dérivées u' et v'.

Fonctions f	**Dérivées f'**
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = \mathrm{a} \times u(x)$	$f'(x) = \mathrm{a} \times u'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice

➪ Calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

$G(x) = 3x^2$ $H(x) = x^3 - 1$ $S(x) = 4x^2 - 5x + 2$ $I(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

$G'(x) = 2 \times 3 \times x = 6x$; $H'(x) = 3 \times x^{3-1} = 3x^2$; $S'(x) = 2 \times 4 \times x - 5 = 8x - 5$

$I'(x) = 3 \times (-2) \times x^{3-1} + 2 \times 4 \times x - 5 = -6x^2 + 8x - 5$

➪ En déduire les nombres dérivés en –1 et en 2.

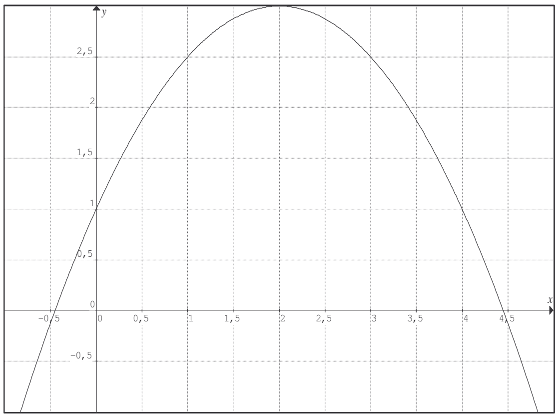
$G'(-1) = 6 \times (-1) = -6$; $G'(2) = 6 \times (2) = 12$

$H'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$; $H'(2) = 3 \times (2)^2 = 12$

$S'(-1) = 8 \times (-1) - 5 = -13$; $S'(2) = 8 \times (2) - 5 = 11$

$I'(-1) = -6 \times (-1)^2 + 8 \times (-1) - 5 = -6 - 8 - 5 = -19$; $I'(2) = -6 \times (2)^2 + 8 \times (2) - 5 = -24 + 16 - 5 = -13$

4) DERIVEE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION



Activité

➪ Ci-contre figure la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 1$.

➪ Calculer la dérivée de f.

$f'(x) = 2 \times -0{,}5 \times x + 2 = -x + 2$

➪ Sur quel intervalle a-t-on $f'(x) > 0$? $f'(x) < 0$?

$f'(x) > 0$ pour $-x + 2 > 0 \Rightarrow x < 2$

$f'(x) < 0$ pour $-x + 2 < 0 \Rightarrow x > 2$

➪ Sur quel intervalle f est-elle croissante ? décroissante ?

f est croissante sur $[-1 ; 2[$

f est décroissante sur $]2 ; 5]$

➪ Quel lien remarque-t-on entre le signe de la dérivée $f'(x)$ et le sens de variation de f ?

....

....

Sens de variation

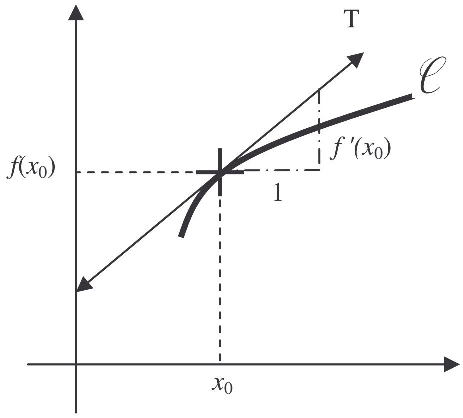
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et admettant une dérivée f' sur I.
Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I
Si, pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est décroissante sur I

Si, pour tout x de I, $f\,'(x)=0$, alors f est constante sur I

5) Equation de la tangente en un point d'une fonction

Rappels :

- **le cœfficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé en ce point**
- la tangente est une droite passant par le point de coordonnées (x_0 ; $f(x_0)$) et d'équation générale y = ax + b.



L'équation de la tangente est :

$$y = f\,'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $f(x) = x^2$ au point d'abscisse $x_0 = -1$

$f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f\,'(x) = 2x$

$f\,'(x_0) = f\,'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

$y = f\,'(-1) \times (x - (-1)) + f(-1) = (-2) \times (x + 1) + 1 = -2x - 1$

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 6$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 1.

$f\,'(x) = f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 6 = 4$

$f\,'(x) = 2x - 3$

$f\,'(1) = 2 \times 1 - 3 = -1$

Équation de la tangente $y = f\,'(1) \times (x - 1) + f(1) = (-1) \times (x - 1) + 4 = -x + 5$

6) EXERCICE

Soit la fonction f définie sur [-1 ;4] par $f(x) = x^2 - 3x + 1,25$.

➪ Calculer la dérivée de f.

$f'(x) = 2x - 3$

➪ Etudier le signe de $f'(x)$.

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1,5$; $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > 1,5$

En déduire le sens de variation de f et compléter le tableau de variation ci-dessous.

x	-1		$1,5$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$5,25$	↘	-1	↗	$5,25$

Compléter le tableau de valeurs :

x	-1	0	1	1,5	2	3	4
$f(x)$	5,25	1,25	–0,75	–1	–0,75	1,25	5,25

Construire la courbe représentative de f.