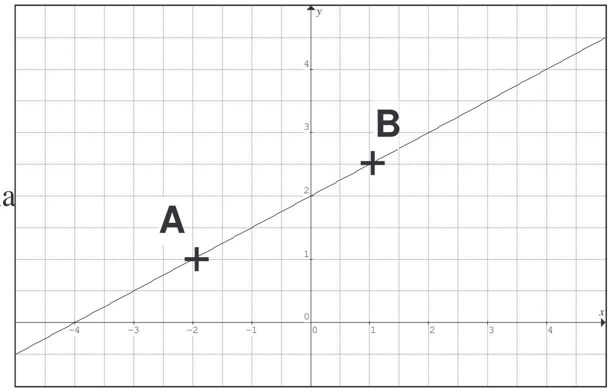
Dérivée d'une fonction

1) Rappel



Dans un repère orthogonal, on considère les points A et B.

➪ Déterminer, sans calcul, par lecture graphique, le cœfficient directeur de la droite (AB).

....

➪ Déterminer par le calcul, le cœfficient directeur de la droite (AB).

....

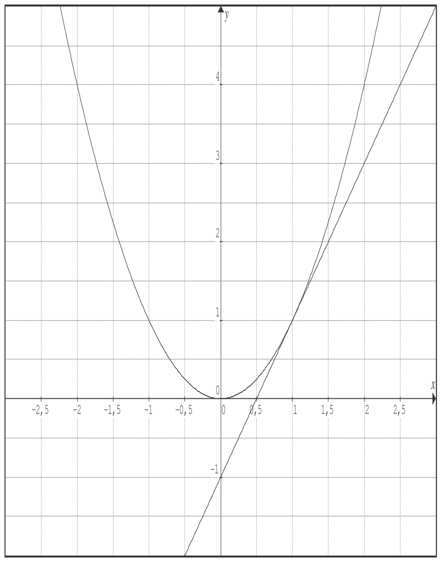
....

➪ Déterminer une équation de la droite (AB).

....

➪ Construire la droite (D) passant par B dont le coefficient directeur est –1,5.

2) Notion de derivee



Activité

➪ La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-contre représente la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La droite T représente la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x-1$.

➪ Graphiquement, on voit que la droite T « touche » la courbe $\mathscr{C}$ au point ....

➪ Algébriquement, montrer que la recherche des points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et T revient à résoudre l'équation : $x^2 - 2x + 1 = 0$.

....

➪ Résoudre cette équation.

....

....

➪ On constate qu'il n'y a qu'un seul point d'intersection entre $\mathscr{C}$ et T. On dit que la droite T est **...............** à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse….

➪ Quel est le coefficient directeur de la droite T ? ....

Par définition, ce nombre est appelé **.....................** de la fonction *f* pour la valeur ….

➪ Déterminer graphiquement le nombre dérivé de *f* pour la valeur –1.

....

Soit la fonction *f* ' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

➪ Vérifier que *f* ' permet d'obtenir le nombre dérivé de *f* pour les valeurs 1 et –1.

....

On admettra qu'il en est ainsi pour toutes les valeurs de $\mathbb{R}$: On dit que *f* ' est la **.............................** de *f*.

Définition

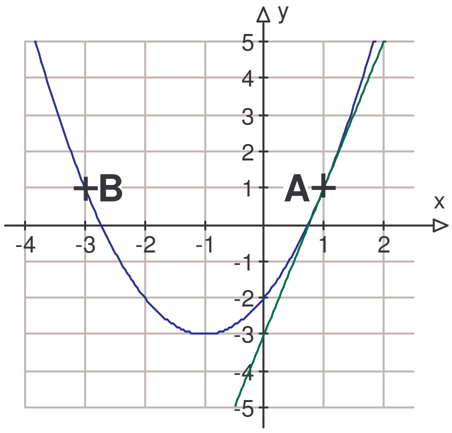
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On suppose que sa courbe représentative admette, au point A d'abscisse « a », une tangente.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse « a » est …………

……………………………………………………………………………………….....

La fonction qui, a tout x de I, fait correspondre le nombre dérivé de f en x, est appelée ...... ………………………….. Elle est notée ……….. ou ....



Exercice

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 2x - 2$, sachant que $f'(1) = 4$, déterminer :

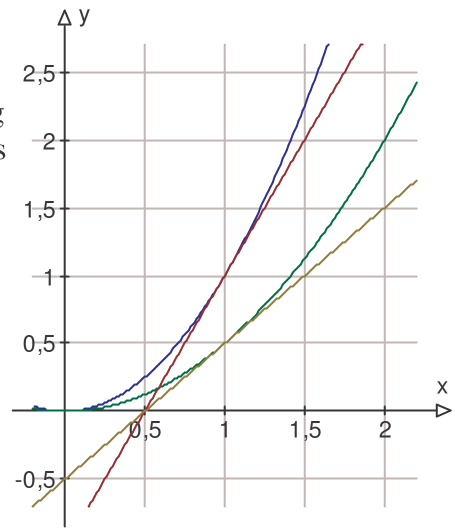
coordonnées du point A : ....

coefficient directeur de la tangente en A : ....

équation de la tangente en A : ....

équation de la tangente en B : ....

3) CALCUL DES DERIVEES



Activité

➪ Ci-contre figurent les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur ℝ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 0{,}5x^2$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisse 1.

➪ Déterminer graphiquement les nombres dérivés des fonctions f et g aux points d'abscisse 1 :

....

➪ On a $g(x) = 0{,}5 \times f(x)$. Vérifier que $g'(1) = 0{,}5 \times f'(1)$.

....

....

On voit que la dérivée de 0,5f est 0,5f '. Plus généralement, si u est une fonction admettant pour dérivée u' et si a est un nombre constant alors la dérivée de $a \times u$ est **.........**

Dérivées des fonctions usuelles

Soient f une fonction, a et b deux constantes.

Fonctions f	**Dérivées f'**
$f(x) = a$	$f'(x) =$
$f(x) = x$	$f'(x) =$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) =$
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = x^3$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) =$

Soit la fonction f:

$x \mapsto a\,x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

La fonction dérivée de f sera f' :

$x \mapsto$ ....

Soient u et v, deux fonctions admettant pour dérivées u' et v'.

Fonctions f	Dérivées f'
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = a \times u(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) =$

Exercice

➪ Calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

$G(x) = 3x^2$ $H(x) = x^3 - 1$ $S(x) = 4x^2 - 5x + 2$ $I(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

....

....

....

....

➪ En déduire les nombres dérivés en -1 et en 2.

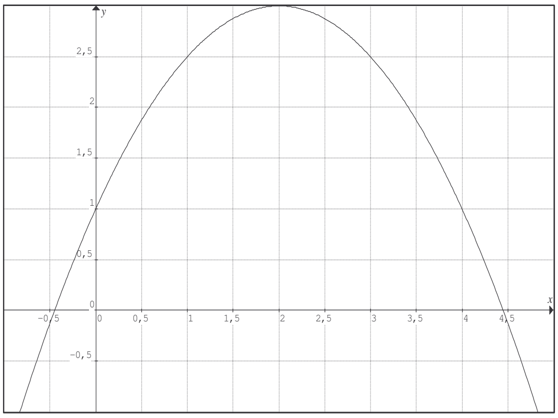
....

....

....

....

4) DERIVEE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION



Activité

➪ Ci-contre figure la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$.

➪ Calculer la dérivée de f.

....

➪ Sur quel intervalle a-t-on $f'(x) > 0$? $f'(x) < 0$?

....

....

....

➪ Sur quel intervalle f est-elle croissante ? décroissante ?

....

....

➪ Quel lien remarque-t-on entre le signe de la dérivée $f'(x)$ et le sens de variation de f ?

....

....

Sens de variation

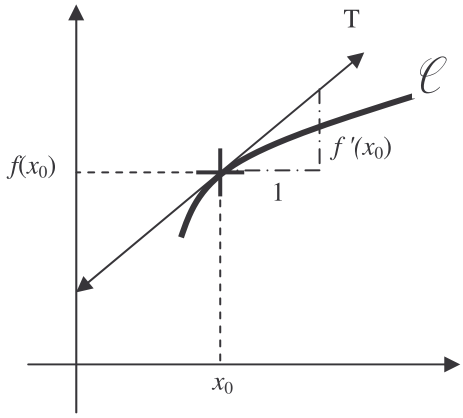
> **Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et admettant une dérivée f ' sur I.**
> **Si, pour tout x de I, $f'(x)>0$, alors f est ....**
> **Si, pour tout x de I, $f'(x)<0$, alors f est ....**
> **Si, pour tout x de I, $f'(x)=0$, alors f est ....**

5) EQUATION DE LA TANGENTE EN UN POINT D'UNE FONCTION

Rappels :

- le cœfficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé en ce point

- la tangente est une droite passant par le point de coordonnées $(x_0\ ;\ f(x_0))$ et d'équation générale y = ax + b.



L'équation de la tangente est :

$$\mathbf{y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $f(x) = x^2$ au point d'abscisse $x_0 = -1$

$f(x_0)$ = ...

$f'(x)$ = ...

$f'(x_0)$ = ...

y = ...

....

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 6$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 1.

$f'(x)$ = ...

$f'(....)$ = ...

Équation de la tangente ....

....

6) EXERCICE

Soit la fonction f définie sur [-1 ;4] par $f(x) = x^2 - 3x + 1,25$.

- Calculer la dérivée de f.

....

- Etudier le signe de $f'(x)$.

....

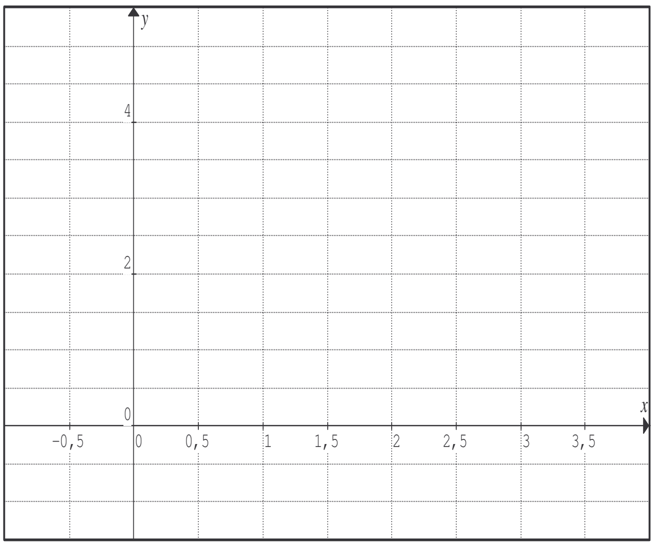
En déduire le sens de variation de f et compléter le tableau de variation ci-dessous.

x	-1 4
$f'(x)$	
$f(x)$	

Compléter le tableau de valeurs :

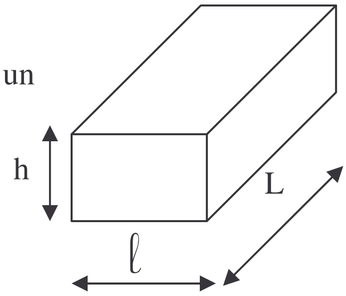
x	-1	0	1	1,5	2	3	4
$f(x)$							

Construire la courbe représentative de f.



EXERCICES

1) Recherche d'un volume maximum



Une entreprise d'emballages industriels veut réaliser un conteneur ayant la forme d'un parallélépipède rectangle pour un transport maritime à l'exportation.
Pour des raisons techniques, ses dimensions intérieures sont liées par les relations :
ℓ+h=5,4m ℓ+L=11m

Exprimer h et L en fonction de ℓ.

....

Montrer que le volume V s'exprime en fonction de ℓ par la relation V = $\ell^3 - 16{,}4\ell^2 + 59{,}4\ell$.

....

....

Soit la fonction f définie sur [1 ; 4] par $f(x) = x^3 - 16{,}4x^2 + 59{,}4x$. Calculer $f'(x)$.

....

Montrer que l'équation $x^3 - 16{,}4x^2 + 59{,}4x = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) que l'on calculera (arrondir au centième).

....

....

Déterminer le signe de $f'(x)$. Etablir le tableau de variation de f.

....

....

Montrer que f admet un maximum et calculer ce maximum.

....

....

En déduire les dimensions intérieures (arrondies au cm) du conteneur ayant un volume maximum.

....

....

2) CHARGES MINIMALES

Une entreprise produit différents articles. Les charges variables C (en francs) de l'entreprise dépendent de la quantité q d'articles produits et sont données par la relation :

$C(q) = 2q^2 - 60q + 500$

Compléter le tableau ci-dessous :

q	0	10	20	30	40	50
C						

On considère la fonction f qui, à x appartenant à l'intervalle [0 ;50] fait correspondre
$f(x) = 2x^2 - 60x + 500$.
Calculer la dérivée de la fonction f, notée f'.

....

Etudier le signe de f'.

....

....

Dresser le tableau de variation de f.

x	
Signe de $f'(x)$	
$f(x)$	

En déduire que la fonction f admet un minimum et calculer ce minimum.

....

....

Tracer la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer les quantités à produire pour que :
les charges soient minimales ;

....

les charges soient inférieures à 2 000 F.

....

3) <u>BENEFICE</u>

Le bénéfice B réalisé par une société pour un nombre q d'articles produits est donné par la relation :

$$B(q) = -28\,000 + 350q - 0{,}7q^2$$

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [100 ;400] par : $f(x) = -0{,}7x^2 + 350x - 28\,000$.
Etudier les variations de f sur l'intervalle considéré.

x	
Signe de $f'(x)$	
$f(x)$	

Tracer la courbe représentative de C de la fonction f dans l'intervalle [100 ;400], dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 0,04 cm sur l'axe des abscisses ; 0,001 cm sur l'axe des ordonnées ;

(sur l'axe des abscisses : 1cm représente 25 ; sur l'axe des ordonnées : 1cm représente 1000).
Déterminer les coordonnées du sommet de la courbe C.

....

Vérifier que B(q) = $f(x)$.

....

....

En déduire le nombre d'articles pour lequel l'entreprise réalisera le bénéfice maximal. Quel sera, dans ce cas, ce bénéfice ?

....

....